Polinomi

Polinomi u kompleksnoj oblasti. Bezuova teorema

Fja oblika

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$$

se naziva polinomom n-tog stepena promjenljive z. Ova promjenljiva u opštem slučaju je iz skupa kompleksnih brojeva. Ovaj polinom ima realne koeficijente.

Broj z_0 nazivamo nulom polinoma $P_n(z)$ ako je $P_n(z_0)=0$.

Pokažimo da ako je z_0 - nula polinoma sa realnim koeficijentima to je tada i njemu konjugovan broj $\bar{z}_0$ takođe nula tog istog polinoma. Zaista,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_n =$$

$$= a_0 \cdot \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_n = P_n(\bar{z})$$

Odavde, ako je $P_n(z_0)=0 \Rightarrow P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = 0$ tj $\bar{z}_0$ je nula polinoma $P_n(z)$.

Iz algebre znamo da ako je stepen n polinoma $P_n(z)$ veći od stepena m polinoma $Q_m(z)$ to polinom $P_n(z)$ možemo da podijelimo polinomom $Q_m(z)$ sa nekim ostatkom, gdje je ~~stepen~~ ostatak polinom stepena manjeg od m tj.

$$P_n(z) = Q_m(z) \cdot S_k(z) + R_l(z) \qquad (1)$$

$Q_m(z)$ je djelitelj $\quad P_n(z)$ - djeljenik

$S_k(z)$ - rezultat djeljenja, a $R_l(z)$ - ostatak djeljenja, pri čemu je $l < m$.

Primjer Pol. $P_5(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ podijeliti polinomom

$$Q_2(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$(3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1) : (x^2 - 3x + 2) = 3x^3 + 9x^2 + 17x + 35$$

$$\begin{aligned}
&-\; 3x^5 - 9x^4 + 6x^3 \\
&\quad +9x^4 - 10x^3 + 2x^2 - x + 1 \\
&-\; 9x^4 - 27x^3 + 18x^2 \\
&\quad 17x^3 - 16x^2 - x + 1 \\
&-\; 17x^3 - 51x^2 + 34x \\
&\quad 35x^2 - 35x + 1 \\
&-\; 35x^2 - 105x + 70 \\
&\quad \dots 69
\end{aligned}$$

$S_3(x) = 3x^2 + 9x^2 + 17x + 35$

$R_1(x) = 70x - 69$

$P_5(x) = Q_2(x) \cdot S_3(x) + R_1(x)$ Δ

Teorema (Bezu) Broj z_0 je nula polinoma $P_n(z)$ ako i samo ako je polinom $P_n(z)$ djeljiv bez ostatka polinomom $z-z_0$. tj

$$P_n(z) = (z-z_0)\cdot S_{n-1}(z) \quad (2)$$

Dokaz

($\Rightarrow$) Neka je z_0 nula polinoma $P_n(z)$. Tada je ~~po prethodnom~~ iz (1) $\Rightarrow$

$P_n(z) = (z-z_0)\cdot S_{n-1}(z) + R$, gdje je R konstanta. Pošto je $P_n(z_0) = 0 \Rightarrow R=0$ odakle slijedi (2).

($\Leftarrow$) Ako je $P_n(z) = (z-z_0) S_{n-1}(z)$ za $z = z_0 \Rightarrow P_n(z_0)=0$.

Teorema (osnovna teorema algebre) Svaki polinom nenultog stepena ima bar jednu nulu u polju kompleksnih brojeva.

Razlaganje polinoma na množitelje

Broj z_0 je nula polinoma $P_n(z)$ višestrukosti k ako se $P_n(z)$ može predstaviti u obliku

$$P_n(z) = (z-z_0)^k S_{n-k}(z) \quad S_{n-k}(z_0) \neq 0.$$

tj. ako je $P_n(z)$ djeljiv bez ostatka sa $(z-z_0)^k$ i nije djeljiv sa $(z-z_0)^{k+1}$. Broj k je višestrukost nule polinoma.

Tada važi sljedeće tvrđenje:

Teorema Polinom n-tog stepena $P_n(z)$ u polju kompleksnih brojeva ima tačno n-nula, pri čemu važi da je

$$P_n(z) = a_0 (z-z_0)^{k_0} (z-z_1)^{k_1} \cdots (z-z_m)^{k_m}$$

$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, $z_0, z_1, \ldots, z_m$ - nule polinoma, a $k_1, \ldots, k_m$ višestrukosti tih nula.

Vidjeli smo da ako je z_0 - nula polinoma $P_n(z)$ da je tada i $\overline{z_0}$ takođe nula tog polinoma. Slijedi da polinom $P_n(z)$ možemo podijeliti sa $(z-z_0)(z-\overline{z_0})$ bez ostatka. Ako je z_0 - nula višestrukosti k, to je i $\overline{z_0}$ takođe nula višestrukosti k. Drugim riječima

$$P_n(z) = (z-z_0)^k (z-\overline{z_0})^k S_{n-2k}(z). \quad (3)$$

$z_0 = a+ib$, $\overline{z_0} = a-ib$ $\quad (z-z_0)(z-\overline{z_0}) = [(z-a)-ib][(z-a)+ib] =$

$= z^2 + pz + q$, gdje je $p = -2a \quad q = a^2+b^2$

Polinom z^2+pz+q ima diskriminantu $D = \frac{p^2}{4} - q = -b^2 < 0$.

Na taj način ako je z_0 nula polinoma z^2+pz+q to je tada diskriminanta tog polinoma $D<0$. Važi i obratno ako je $D<0 \Rightarrow$ polinom z^2+pz+q ima nule $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-D}$

Na osnovu ovoga slijedi da ako su z_0 i $\bar{z}_0$ međusobno konjugovane nule polinoma $P_n(z)$ višestrukosti k to tada važi

$$P_n(z) = (z^2+pz+q)^k S_{n-2k}(z).$$

Na osnovu ovoga možemo formulisati sljedeću teoremu.

<u>Teorema</u> Za svaki polinom $P_n(x)$ s realnim koeficijentima važi :

$$P_n(x) = a_0 (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

gdje je $k_1+k_2+\cdot\cdot+k_r+2(l_1+l_2+\cdot\cdot+l_s)=n$

$\frac{p_i^2}{4} - q_i < 0$, $i=1,2,\cdot\cdot,s$, a svi brojevi $a_0\, x_1, x_2, \ldots x_r, p_1, q_1 \ldots, p_s, q_s$ su realni brojevi.

T. Polinom je jednak nuli ako su svi njegovi koeficijenti jednaki nuli

<u>Kriterijum višestrukosti nula polinoma</u>

<u>Teorema</u> Ako je $x=x_0$ nula višestrukosti k polinoma $P_n(x)$, to je x_0 nula višestrukosti $k-1$ njegovog izvoda $P_n'(x)$.

<u>Dokaz</u>: Neka je $x=x_0$ nula višestrukosti k polinoma $P_n(x)$. Tada važi da je

$$P_n(x) = (x-x_0)^k S_{n-k}(x), \quad S_{n-k}(x_0) \neq 0.$$

Diferencirajmo posljednju jednakost. Tada je

$$P_n'(x) = k(x-x_0)^{k-1} S_{n-k}(x) + (x-x_0)^k S_{n-k}'(x) = (x-x_0)^{k-1} \cdot R_{n-k}(x)$$

gdje je $R_{n-k}(x) = k S_{n-k}(x) + (x-x_0) S_{n-k}'(x)$, $R_{n-k}(x_0) = k S_{n-k}(x_0) \neq 0$

tj. x_0 je nula višestrukosti $k-1$ polinoma $P_n'(x)$.

<u>Posljedica</u> (Kriterijum višestrukosti nule polinoma)

Da bi broj $x=x_0$ bio nula višestrukosti k, $k \leq n$, polinoma $P_n(x)$ potrebno je i dovoljno da

$$P_n(x_0) = P_n'(x_0) = P_n''(x_0) = \ldots = P_n^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Integralni račun funkcija jedne promjenljive

Primitivna funkcija i neodređeni integral

U ovoj glavi rješava se problem da za poznati izvod $f'(x)$ treba naći funkciju $f(x)$.

<u>Definicija</u> Funkcija $F(x)$ je primitivna f-ja funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) ako je $F(x)$ diferencijabilna na (a,b) i ako je $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Analogno se def. primitivna f-ja na $[a,b]$ i na beskonačnom, odnosno polubeskonačnom intervalu. Za te intervale podrazumijeva se $F'(a)$ desna odnosno lijeva diferencijabilnost.

<u>Primjer</u> Funkcija $F(x) = \cos(2x-3)$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x) = -2\sin(2x-3)$, pošto je $F'(x) = -2\sin(2x-3) = f(x)$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$

Ako je $F(x)$ primitivna f-ja f-je $f(x)$ na (a,b) to je i f-ja $F(x)+C$, gdje je C - proizvoljna konstanta, također primitivna f-ja za f-ju $f(x)$ na intervalu (a,b). Ovo slijedi iz činjenice da je $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$.

<u>Teorema</u> Ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dvije primitivne f-je f-je $f(x)$ na intervalu (a,b), to je tada $F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in (a,b)$ gdje je C - neka konstanta.

<u>Dokaz.</u> Označimo sa $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Pošto su F_1 i F_2 diferencijab. f-je na (a,b) $\Rightarrow$ $\Phi(x)$ takođe diferencijabilna f-ja na (a,b). Takođe, imamo da je $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$. $\Rightarrow$ $\Phi(x) = C = \text{const}$.

$\Phi'(x) = 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow \Phi(x) = \text{const}$, $x_0 \in (a,b)$ proizvoljno,

Tada za proizvoljno $x \in (a,b)$ po Lagrangeovoj teoremi $\Rightarrow$

$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Phi'(c)(x - x_0)$, gdje je c tačka između x i x_0.

Pošto je $\Phi'(c) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = \Phi(x_0) = C$, $\forall x \in (a,b)$ tj. $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ $\forall x \in (a,b)$

Znači ako je $F(x)$ primitivna f-ja f-je $f(x)$ na (a,b) to po posljednjoj teoremi slijedi da je i f-ja $F(x)+C$ takođe primitivna f-ja f-je $f(x)$, C - proizvoljna konstanta.

<u>Definicija</u> Skup svih primitivnih f-ja za f-ju $f(x)$ na intervalu (a,b) naziva se neodređenim integralom f-je $f(x)$ i označava se simbolom $\int f(x)dx$.

Ako je $F(x)$ primitivna f-ja f-je $f(x)$ tada je

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

gdje je C - neka konstanta, koju nazivamo konstantom integracije.

Ako se vratimo na naš primjer, imamo da je

$$\int(-2\sin(2x-3))\,dx = \cos(2x-3).$$

Analogno $\int 0\,dx = C$, $\int 1\,dx = \int dx = x + C$.

Operacija traženja primitivne f-je ili neodređenog integrala od f-je $f(x)$ naziva se integracijom f-je $f(x)$.

Svojstva neodređenog integrala

<u>Teorema</u> Neka je $F(x)$ primitivna f-ja ~~za~~ f-je $f(x)$ na (a,b).

Tada važi:

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

3) $\int dF(x) = F(x)+C$

4) $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx + C$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

5) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

<u>Dokaz</u> 1) $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = f(x)dx$

2) $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

3) $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$

4) $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx$

$$\left(\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx\right)'=\alpha\left(\int f(x)dx\right)'+\beta\left(\int g(x)dx\right)'=$$
$$=\alpha f(x)+\beta g(x).$$

Odavde slijedi da je f-ja $\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$ primitivna f-ja za funkciju $\alpha f(x)+\beta g(x)$. S druge strane f-ja $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx$ je takođe primitivna f-ja za funkciju $\alpha f(x)+\beta g(x)$. Pošto se dvije primitivne f-je jedne iste f-je razlikuju na konstantu c, to odatle važi tvrđenje 4).

5) $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+c\right)'=\frac{1}{a}\cdot aF'(ax+b)=f(ax+b)$.

tj $\Rightarrow \int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$

Tablica integrala

1) $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\quad \alpha\neq -1$

2) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c,\quad a>0,\ a\neq 1$

3) $\int e^x dx=e^x+c$

4) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c,\quad x\neq 0$

5) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

6) $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

7) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+c,\quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$

8) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+c,\quad x\neq k\pi,\ k\in Z$

9) $\int \operatorname{sh}x=\operatorname{ch}x+c$

10) $\int\operatorname{ch}x=\operatorname{sh}x+c$

11) $\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+c$

12) $\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+c\quad x\neq 0$

13) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+c\\ -\arccos x+c\end{cases}\quad -1<x<1$

14) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg}x+c\\ -\operatorname{arcctg}x+c\end{cases}$

15) $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+c=$
$=-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+c,\quad a\neq 0$

16) $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+c,\quad a\neq 0$

17) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+c=$
$=-\arccos\dfrac{x}{a}+c,\quad |x|<|a|$

18) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c\quad a\neq 0$

(ako je $-\ |x|>|a|$)

Dokazana svojstva 1-5) i tablica neodređenih integrala nam daje mogućnost računanja ~~složenijih~~ integrala složenijih integralnih f-ja.

Primjer 1) $\int \left(3\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^2 dx = \int \left(9x + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= 9\int x\,dx + 12\int x^{-1/2}dx + 4\int x^{-2}dx = \frac{9}{2}x^2 + 24\sqrt{x} - 4\frac{1}{x} + C$

2) $\int \cos^2(2x-1)dx = \int \frac{1+\cos(4x-2)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(4x-2)dx =$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\qquad = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin(4x-2) + C$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \cos^2 x = 1-\sin^2 x \\ \cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Metode integracije

Metod smjene (zamjene)

Teorema Neka postoji $\int f(x)dx$ na (a,b) i neka je $x=\varphi(t)$ neprekidno diferencijabilna f-ja, $f(x)$ neprekidna f-ja, pri čemu oblast vrijednosti f-je $x=\varphi(t)$ pripada oblasti definisanosti f-je $f(x)$.

Tada važi jednakost:

$$\cancel{\int f(x)dx + C =}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx + C \qquad (4)$$

Dokaz Prodiferenciramo lijevu i desnu stranu jednakosti

Imamo: $\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\left(\int f(x)dx + C\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot x'_t = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

izjednačavajući ove dvije jednakosti dobijamo traženu jednakost.

~~Primjer 2)~~ $\cancel{\int \cos^5 x \sin x\,dx}$

Formulu (4) možemo zapisati

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C \qquad (5)$$

Primjer 1) Izračunati $\int \cos^5 x \sin x\,dx$

$$\int \cos^5 x \sin x\,dx = -\int \cos^5 x\, d\cos x = \left| \cos x = t \right| =$$
$$= -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6}\Big|_{t=\cos x} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$$

2)
$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x\, d\ln x = \left| \ln x = t \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{t=\ln x} + C =$$
$$= \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

3)
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \left| t = x^2+a \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{t=x^2+a} + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + C$$

Znači metod zamjene promjenljive

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C}$$

Znači potrebno je uvesti zamjenu $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$
gdje je $\varphi(t)$ neprekidno dif. f-ja.

Primjer $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\Big(t + \underbrace{\frac{\sin 2t}{2}}_{=\sin t\cos t}\Big) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

$t = \arcsin\frac{x}{a}$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

Za integral $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ očigledna je smjena $t = f(x)$
tada je

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

Primjer 1) $\int ctg x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = |\sin x = t| =$

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$

2) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\, tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}} = \ln|tg\tfrac{x}{2}| + C$

Metod parcijalne integracije

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ – neprekidno diferencijabilne funkcije na nekom intervalu. Tada važi formula:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx \quad (5)$$

ili

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad (6)$$

Formula (5) se naziva formulom parcijalne integracije.

Dokaz formule: Nađimo diferencijal $d\,~~t~~u$

$d(uv) = v\,du + u\,dv$

Odavde je $\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$

s druge strane $\int d(uv) = u\cdot v + C$

$uv + C = \int v\,du + \int u\,dv$ ili

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\Rightarrow$ ili

$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

$(uv)' = u'v + uv' \,/\int$

$uv = \int u'v\,dx + \int uv'dx$

$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

Konstanta je pripojena integralu $\int v\,du$ s desne strane

Primjer 1) $I = \int x\sin x\,dx$

$u = x \quad \sin x\,dx = v'dx \Rightarrow \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

$u = x \quad dv = \sin x\,dx = -d\cos x \Rightarrow v = -\cos x$

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

2) $\int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$

Parcijalna integracija može da dovede do integrala koji se poklapa sa polaznim integralom. U tom slučaju se integral računa u odnosu na polazni integral ~~jednakost~~. jednačinu tj.

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = a e^{ax}dx \\ dv = \cos bx\,dx & v = \int \cos bx\,dx = \\ & = \frac{1}{b}\sin bx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \quad du = a e^{ax}dx \\ dv = \sin bx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{=I}$$

$$I = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{b^2}e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}I$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \quad \text{tj.} \quad (a^2+b^2)I = (b\sin bx + a\cos bx)e^{ax}$$

$$I = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$$

- Integrali oblika $\int P_n(x)(a\cos\alpha x + b\sin\beta x)dx$ ili oblika $\int P_n(x)e^{ax}dx$

uvijek za $u(x)$ uzimamo polinom $P_n(x)$ – n-tog stepena od x

- Ako podintegralna fja sadrži kao jedan od činilaca jednu od sljedećih fja $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\arcsin^2 x$, $\arccos^2 x$, ... za $u(x)$ treba uzimati jednu od tih fja.

Primjer: Izračunati $I = \int \cos\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos\ln x \quad du = -\frac{\sin\ln x}{x}dx \\ dv = dx, \; v = x \end{array} \right| =$

$$= x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin\ln x & du = \frac{\cos\ln x}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x\cos\ln x + x\sin\ln x - I$$

$$\Rightarrow I = \int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$$